752. Banach 空間ニ於ケル Positive operation I

角谷　静夫（阪大）

Semi-order ノツイタ Banach 空間 E ヲ考ヘル。[1] 即チ、Banach 空間 E 内ニ positive part（正確ニハ zero + positive part）S ヲ考ヘ、コノ S ガ次ノ條件ヲ滿足スルモノトスル。

(1) $x \in S$, $y \in S$ ナラバ $x+y \in S$

(2) $x \in S$, $\lambda \geq 0$ ナラバ $\lambda x \in S$

(3) S ハ closed (strong topology ニテ)

(4) $x \in S$, $x \neq 0$ ナラバ $-x \,\overline{\in}\, S$

---

(1) 當分ノ間ハ real Banach space ヲ考ヘル。

$x \in S$ ナルコトヲ $x \geqq 0$（正確ニハ $x \in S$, $x \neq 0$ ナルコトヲ $x > 0$）ニテ表ハシ $x > 0$ ナルコトヲ x ハ positive デアルト云フ。又 $x-y \geqq 0$, $x-y > 0$ ナルコトヲ夫々 $x \geqq y$, $x > y$ ニヨツテ表ハス。S ニ関スル條件 (1)―(4) ヨリ

(5) $x \geqq y$, $y \geqq z$ ナラバ $x \geqq z$

(6) $x \geqq y$, $\lambda \geqq 0$ ナラバ $\lambda x \geqq \lambda y$

(7) $x_n \geqq y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ (strongly) ナラバ $x \geqq y$

(8) $x \geqq y$, $y \geqq x$ ナラバ $x = y$

ガ得ラレルコトハ明カデアル。此ノ如クシテ E ニ semi-order ガツケラレル。[2]

Banach 空間 E ヲ E ノ中ニウツス operator T ハ S ヲ S ノ中ヘウツストキ positive operator デアルト云フ。[3] positive デ且ツ completely continuous ナ linear operator T ノ固有値ニ関スル問題ハ M. A. Rutmann[4] ニヨツテ論ゼラレ色々興味アル結果ガ得ラレテキル。Rutmann

---

(2) Semi-order ニ関シテハ通常ハ (5)―(8) 以外ニモウ少シ條件ヲ入レル。コノ談話ニ於テモ後デ條件ヲ入レルノデアルガ今ハコレダケニ止メル。

(3) 紙上談話会162号, 吉田氏ノ談話 710, 299―300頁参照.

(4) M. A. Rutmann: Sur une classe spécielle d'opérateurs linéaires totalement continues. C. R. URSS, 18 (1938), No. 9.

ノ論文ハ單ニ結果ト、ソレヲ得ルタメニ用ヒタ Lemma ガ書イテアルダケデ證明ヲ辿ルコトハ出來ナイ。ソレデコノ談話デハ Rutmann トハ全然独立ニ positive operator ノ固有値ニ關スル二三ノ結果ヲ證明シヨウ。

Rutmann ノ使ッテキル Lemma ハ非常ニ面倒ナモノデアリ、且ツ Schauder ノ不動点定理ヲ用ヒルト書イテアルカラ、次ニ述ベル證明ハ Rutmann ノソレヨリモ遙カニ elementary デ且ツ簡単ナワケデアル。唯 positive part S ト Banach 空間 E ノ norm トノ關係ニ關シテ二三ノ假定ガ必要ナノハ残念デアル。シカモ実際ニハコレラノ假定ハ大概ノ場合ニ満足サレテキル。

positive part S ト norm トノ關係ニ關スル條件

(I) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナラバ $\|x+y\| \geqq \|x\|$, 即チ

$x \geqq y \geqq 0$ ナラバ $\|x\| \geqq \|y\|$.

(II) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナラバ $\|x+y\| > \|x\|$, 即チ

$x > y \geqq 0$ ナラバ $\|x\| > \|y\|$.

(II) ハ明カニ (I) ヨリモ強イ條件デアル。

S ハ (strong topology ニテ) 必ズシモ内点ヲ有シナイ。特ニ S ガ内点ヲ有スルトキハ $x \in S$ ガ S ノ内点デアルコトヲ $x \gg 0$ ニヨッテ表ハスコトニスル。コノトキ x ハ strongly positive デアルト云フ。$x-y \gg 0$ ナルコトヲ $x \gg y$ ニヨッテ表ハス. $x \gg 0$ デアレバ任意ノ $y \in E$ ニ對シテ十分大キク $C=C(y)$ ヲトレバ $Cx \gg y$ トナル。何トナレバ $x \gg 0$ ナルコトヨリ (十分小サイ) $\delta > 0$ ガ定マッ

ヲ $\|x-z\|<\delta$ ナルスハスベテ $z\geqq 0$ トナル。ヨツテ $C=C(y)$ ヲ $\|y\|<\delta\cdot C$ ナル如ク（十分大キク）トツテオケバコノ c ニ對シテ $cx-y=c(x-\frac{y}{c})\equiv cz$ ハ
$\|x-z\|=\|x-(x-\frac{y}{c})\|=\|\frac{y}{c}\|<\delta$ ナル故 $cx-y\geqq 0$,
$cx\geqq y$ トナル。

又 $x\gg y\geqq 0$ ナラバ十分小サイ $\delta>0$ ニ對シテ $x\geqq(1+\delta)y$ トナルコトモ明カデアル。

Banach 空間 E ノ positive operator T ノウチ $x>0$ ナルトキ $Tx\gg 0$ トナルモノヲ特ニ strongly positive ト呼ブコトニスル。strongly positive operator ハ定理2以下ニテ取扱ハレル。

定理ヲ述ベル前ニ具体的ナ Banach 空間ニ於イテ positive part S 及ビ positive（又ハ strongly positive）operator T ガ如何ナルモノニ取リ得ルカヲ示サウ。

(R_n). Euclid ノ n 次元空間、$\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n)$. ξ_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ハ皆 real number. $\xi\geqq 0$（即チ $\xi\in S$）トナルノハスベテノ $\xi_k\geqq 0$ ナル時ト定メル，$\xi>0$ トナルノハコノウチ、少クトモ一ツノ $\xi_k>0$ トナルトキデアル。條件(I), (II) ハ何レモ満足サレテキル。[5]

---

(5) S ガ條件(1), (2), (3), (4) ヲ満足スルコトハ勿論明カデアル。條件(1)—(4) ハ以下ノ例ニテハ常ニ満足サレテキル。今後 positive part S トイフトキニハ (1)—(4) ハ常ニ満足サレテキルモノトスル。

又Sハ内点ヲ有シテヰル。$\xi \gg 0$トナルノハ、スベテノ$\xi_k > 0$トナルトキデアル。

(R_n)ノ positive linear operator ハスベテノ element ガ non-negative ナ square matrix ニヨッテ與ヘラレ、特ニ strongly positive linear operator ハスベテノ element ガ positive ナ square matrix ニヨッテ與ヘラレル。

(l_p) $(p \geqq 1)$. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_k, \cdots\cdots)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$ ナル real number ノ系列全体ノ集合. $\|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ニヨッテ norm ガ定義サレル。$\xi \geqq 0$（即テ$\xi \in S$）トナルノハスベテノ$\xi_k \geqq 0$ナルトキト定メル。$\xi > 0$トナルノハ少クトモ一ツノ$\xi_k > 0$トナルトキデアル。條件(I), (II)ハ満足サレテヰルガSハ内点ヲ有シナイ![(6)]

(L_p) $(p \geqq 1)$. $0 \leqq x \leqq 1$ニテ定義サレタ實數値ノ measurable function $f(x)$ ニテ $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$ トナルモノ全体ノ集合 $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ニテ norm ヲ定義スル。measure zero ヲ除イテ一致スル函數ハ同ジモノト考ヘル。$f \geqq 0$（即テ$f \in S$）トナルノハ measure zero ノ集合ヲ除イテ$0 \leqq x \leqq 1$ニ於テ$f(x) \geqq 0$ナルトキト定メル。$f > 0$トナルノハ、コノ外ニテ measure positive

---

(6) コレハ殆ド明カデアロウ。

ナ集合ニテ $f(x)>0$ トナルモノデアル。條件(I), (II) ハ満足サレテキルガSハ内点ヲ有シナイ!

(C). $0\leqq x\leqq 1$ ニテ定義サレタ real valued continuous function $f(x)$. 全体ノ集合. $\|f\|=\max_{0\leqq x\leqq 1}|f(x)|$ ニヨッテ norm ヲ定義スル。

$f\geqq 0$ (即チ $f\in S$) トナルノハ $0\leqq x\leqq 1$ ノ各点ニテ $f(x)\geqq 0$ ナルトキト定メル。$f>0$ トナルノハ, コノウチ $0\leqq x\leqq 1$ ノ少クトモ一点ニテ $f(x)>0$ トナルトキデアル。條件(I)ハ満足サレルガ(II)ハ満足サレナイ。(II)ガ満足サレルタメニハ $|||f|||=\|f\|+\int_0^1|f(x)|dx$ ニヨッテ新シイ norm $|||f|||$ ヲ考ヘレバヨイ。[(7)] $|||f|||$ ガ norm ノ條件ヲ満足スルコトハ明カデアルシ、$\|f\|\leqq|||f|||\leqq 2\|f\|$ デアルカラ $|||f|||$ ニヨッテ與ヘラレル topology ト $\|f\|$ ニヨッテ與ヘラレル topology トハ equivalent デアル。Sハ内点ヲ有スル。($|||f|||$ ニヨル topology ト $\|f\|$ ニヨル topology トハ equivalent デアルカラ何レノ topology ニ関シテモ内点ヲモツ)。$f\gg 0$ トナルノハ $0\leqq x\leqq 1$ ノ各点ニテ $f(x)>0$ トナルコト. 即チ $f(x)\geqq\delta>0$ ナル positive number $\delta>0$ ガ存在スルコトデアル。

(M) $0\leqq x\leqq 1$ ニテ定義サレタ実数値ノ bounded measurable function $f(x)$ 全体ノ集合 $\|f\|=$

---

(7) コノ様ナ新シイ norm ヲ定義スルコトハEガ separable デSガ内点ヲ有スル時ニ可能デアル。

$\underset{0\leqq x\leqq 1}{\mathrm{ess.\,max}}\,|f(x)|$ ニヨツテ norm ヲ定義スル。measure zero ノ集合ヲ除イテ一致スル函数ハ同ジモノト考ヘル。$f\geqq 0$（即チ $f\in S$）トナルノハ $0\leqq x\leqq 1$ ニテ measure zero ノ集合ヲ除イテ $f(x)\geqq 0$ ナルトキト定メル。$f>0$ トナルノハ、ソノ内テ measure positive ナ集合ニテ $f(x)>0$ トナル場合デアル。條件（I）ハ満足サレルが（II）ハ満足サレナイ。（II）が満足サレルタメニハ

$$|||f||| = \|f\| + \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

ニヨリ新シイ norm $|||f|||$ ヲ定義スレバヨイ。（（M）ハ separable デハナイが）。(8)

S ハ内点ヲ有スル。$f\gg 0$ トナルノハ $\underset{0\leqq x\leqq 1}{\mathrm{ess.\,min}}\,f(x)>0$ トナルトキデアル。即チ $\delta>0$ が定マツテ measure zero ノ集合ヲ除イテ $0\leqq x\leqq 1$ ニテ $f(x)\geqq\delta>0$ トナルトキデアル。

---

(8) $-\infty<x<\infty$ ニテ定義サレタ有界可測ナ実数値函数ノ空間ノ場合モ同様ニ

$$|||f||| = \|f\| + \int_0^1 |f(x)|\,\frac{dx}{1+|x|^2}$$

ニヨツテ新シイ norm が定義出来ル。

定理1. Eヲ semi-order ノアル Banach空間, TヲEヲEノ中ヘウツス positive, completely continuous ナ linear operator トスル。若シ條件(II)ガ満足サレ、且ツ $Tx_0 \geqq c_0x_0$ トナル如キ positive element $x_0>0$ 及ビ positive real number $c_0>0$ トガ存在スレバ $Ty_0=d_0y_0$ トナル如キ positive element $y_0>0$ 及ビ positive real number $d_0 \geqq c_0>0$ ガ存在スル。

証明： $Tx \geqq cx$ ガ少クトモ一ツノ positive element $x>0$ ニ對シテ成立スル如キ positive number $c>0$ 全体ヲ考ヘ、カヽル c 全体ノ上限ヲ d_0 トスル。假定ニヨリ $Tx_0 \geqq c_0x_0$, $x_0>0$, $c_0>0$ デアルカラ $d_0 \geqq c_0$ デアル。又 $d_0 \leqq \|T\|$ トナルコトハ明カデアル。

先ヅ $Tz_0 \geqq d_0z_0$ ガ成立スル如キ positive element $z_0>0$ ガ存在スルコトヲ証明シヨウ。

d_0 ノ定義ヨリ $Tx_n \geqq c_nx_n$, $x_n>0$, $c_n>0$, $n=1, 2, \cdots\cdots$, $c_n \to d_0$ ナル如キ positive element $x_n>0$ 及ビ positive number c_n ノ系列ガ存在スル。$\|x_n\|=1$, $n=1, 2, \cdots\cdots$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。$\{Tx_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘレバ T ガ completely continuous ナルコトヨリ $\{Tx_n\}$ ノ部分列 $\{Tx_{n_\nu}\}$ ガ存在シテ $Tx_{n_\nu} \to z_0 \in E$ (strongly). $Tx_{n_\nu} \geqq 0$ ナル故 $z_0 \geqq 0$. シカモ $\|Tx_{n_\nu}\| \geqq \|c_{n_\nu}x_{n_\nu}\| = |c_{n_\nu}| \to d_0$

ナル故 $\|z_0\| \geqq d_0$, ヨッテ $z_0 \neq 0$. $z_0 \geqq 0$, $z_0 \neq 0$ ナル故 $z_0 > 0$.

又、$T^2 x_{n_\nu} \to T z_0$ ニテ且ツ $T^2 x_{n_\nu} \geqq C_{n_\nu} \cdot T x_{n_\nu} \to d_0 z_0$ (strongly) ナル故 $T z_0 \geqq d_0 z_0$

此ノ如クシテ $T z_0 \geqq d_0 z_0$ トナル如キ positive element $z_0 > 0$ ノ存在ガワカッタ。次ニコノ z_0 ニ對シテ系列 $\left\{\frac{1}{d_0^n} T^n z_0\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘル。$z_0 \leqq \frac{1}{d_0} T z_0 \leqq \frac{1}{d_0^2} T^2 z_0 \leqq \cdots\cdots \leqq \frac{1}{d_0^n} T^n z_0 \leqq \cdots\cdots$ ナル故 (II) ヨリ

$$\|z_0\| \leqq \frac{1}{d_0}\|T z_0\| \leqq \frac{1}{d_0^2}\|T^2 z_0\| \leqq \cdots\cdots \leqq \frac{1}{d_0^n}\|T^n z_0\| \leqq \cdots\cdots.$$

ヨッテ $\varliminf_{n\to\infty} \dfrac{\|T^{n+1} z_0\|}{\|T^n z_0\|} \geqq d_0$

以下二ツノ場合ニ分ケテ考ヘル。

$$\text{(i)} \quad \boxed{\varliminf_{n\to\infty} \frac{\|T^{n+1} z_0\|}{\|T^n z_0\|} = d_0 \quad \text{ナルトキ}}$$

$\{n\}$ ノ部分列 $\{n_\nu\}$ ヲ適當ニトレバ $\lim_{\nu\to\infty} \dfrac{\|T^{n_\nu+1} z_0\|}{\|T^{n_\nu} z_0\|} = d_0$.

今コノ $\{n_\nu\}$ ニ對シテ $z_{n_\nu} = \dfrac{T^{n_\nu - 1} z_0}{\|T^{n_\nu - 1} z_0\|}$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$, ヲ考ヘル。

$\|z_{n_\nu}\| = 1$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル故 T ガ completely continuous ナルコトヨリ $\{n_\nu\}$ ノ部分列 $\{n'_\nu\}$ ヲ適當

ニトレバ $Tz_{n'_\nu}=\dfrac{T^{n'_\nu}z_0}{\|T^{n'_\nu-1}z_0\|}\to y_0\in E$ (strongly).

$Tz_{n'_\nu}\geqq 0$ ナル故 $y_0\geqq 0$. 又 $\|Tz_{n'_\nu}\|=\dfrac{\|T^{n'_\nu}z_0\|}{\|T^{n'_\nu-1}z_0\|}\geqq d_0$

ナル故 $\|y_0\|\geqq d_0$, $y_0\neq 0$. $y_0\geqq 0$, $y_0\neq 0$ ナル故 $y_0>0$.

又 $T^2z_{n'_\nu}\to Ty_0$ ニテ且ツ

$$T^2z_{n'_\nu}=\frac{T^{n'_\nu-1}z_0}{\|T^{n'_\nu-1}z_0\|}\geqq d_0\frac{T^{n'_\nu}z_0}{\|T^{n'_\nu-1}z_0\|}=d_0\cdot Tz_{n'_\nu}\to d_0y_0$$

ナル故 $Ty_0\geqq d_0y_0$ シカモ $\{n_\nu\}$ ノ選ビカタヨリ

$$\frac{\|T^2z_{n'_\nu}\|}{\|Tz_{n'_\nu}\|}=\frac{\|T^{n'_\nu+1}z_0\|}{\|T^{n'_\nu-1}z_0\|}\Big/\frac{\|T^{n'_\nu}z_0\|}{\|T^{n'_\nu-1}z_0\|}=\frac{\|T^{n'_\nu+1}z_0\|}{\|T^{n'_\nu}z_0\|}\to d_0$$

ナル故 $\|Ty_0\|=\|d_0y_0\|$. 此ノ如ク $Ty_0\geqq d_0y_0>0$ ニテ且ツ $\|Ty_0\|=\|d_0y_0\|$ が得ラレタカラ (II) ニヨリ $Ty_0=d_0y_0\neq 0$. ヨツテ (i) ノ場合ニハ定理ハ証明サレタ。

(ii) $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\|T^{n+1}z_0\|}{\|T^nz_0\|}>d_0 \text{ ナルトキ.}}$

十分小サイ $\varepsilon>0$ ト十分大キイ n_0 ヲトレバ $n>n_0$ ニ對シテ $\dfrac{\|T^{n+1}z_0\|}{\|T^nz_0\|}>d_0(1+\varepsilon)^2$, $\varepsilon>0$. ヨツテ z_0 ノ代リニ

$T^{n_0}z_0$ ヲ考ヘレバ $\dfrac{\|T^{n+1}z_0\|}{\|T^nz_0\|}>d_0(1+\varepsilon)^2$ が $n=1,2,\cdots\cdots$ ニ對シテ成立スルト考ヘテ差支ヘナイ。

$$z_n=(1+\varepsilon)\frac{Tz_0}{\|Tz_0\|}+(1+\varepsilon)^2\frac{T^2z_0}{\|T^2z_0\|}+\cdots\cdots+(1+\varepsilon)^n\frac{T^nz_0}{\|T^nz_0\|},$$

$n=1,2,\cdots\cdots$ ヲ考ヘル。$z_n>0$ デアル．右辺ノ各項ハ

>0 ナル故 (II) ヨリ $\|z_n\|\geqq\left\|(1+\varepsilon)^n\dfrac{T^nz_0}{\|T^nz_0\|}\right\|=(1+\varepsilon)^n\to\infty.$

ヨツテ $\alpha_n=\dfrac{1}{\|z_n\|}$ トオケバ $\alpha_n\to0$。$\alpha_n z_n=y_n$ トオケ。$y_n>0$, $\|y_n\|=1$, $n=1,2,\cdots\cdots$ デアル。T ハ completely continuous デアツタカラ $\{n_\nu\}$ ヲ適當ニトレバ $Ty_{n_\nu}\to y_0\in E$ (strongly). $Ty_{n_\nu}\geqq0$ ナル故 $y_0\geqq0$. 且ツ $Ty_{n_\nu}\geqq d_0y_{n_\nu}$ ナル故 $\|Ty_{n_\nu}\|\geqq d_0\|y_{n_\nu}\|=d_0$. ヨツテ $\|y_0\|\geqq d_0$ 即チ $y_0\neq0$. $y_0\geqq0$, $y_0\neq0$ ナル故 $y_0>0$. 更ニ $T^2y_{n_\nu}\geqq d_0Ty_{n_\nu}\to d_0y_0$ (strongly). $T^2y_{n_\nu}\to Ty_0$ ナル故 $Ty_0\geqq d_0y_0$. シカシ我々ハ更ニ進ンデ $Ty_0\geqq(1+\varepsilon)d_0y_0$ ガ成立スルコトヲ証明スルコトガ出来ル。即チ

$$(1+\varepsilon)d_0Ty_{n_\nu}=\alpha_{n_\nu}\Big\{d_0(1+\varepsilon)^2\frac{T^2z_0}{\|Tz_0\|}+d_0(1+\varepsilon)^3\frac{T^3z_0}{\|T^2z_0\|}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+d_0(1+\varepsilon)^{n_\nu+1}\frac{T^{n_\nu+1}z_0}{\|T^{n_\nu}z_0\|}+\quad *\quad.\Big\}$$

$$T^2y_{n_\nu}=\alpha_{n_\nu}\Big\{\quad *\quad+(1+\varepsilon)\frac{T^3z_0}{\|Tz_0\|}+\cdots\cdots+(1+\varepsilon)^{n_\nu-1}\frac{T^{n_\nu+1}z_0}{\|T^{n_\nu-1}z_0\|}$$

$$+(1+\varepsilon)^{n_\nu}\frac{T^{n_\nu+2}z_0}{\|T^{n_\nu}z_0\|}\Big\}$$

デアリ且ツ右辺ノ對應スル項ハ、假定ニヨリ

$$d_0(1+\varepsilon)^{k+2}\frac{T^{k+2}z_0}{\|T^{k+1}z_0\|}<(1+\varepsilon)^k\frac{T^{k+2}z_0}{\|T^k z_0\|},$$

$$k=1,2,\cdots\cdots,n_\nu-1$$

ナル故

$$T^2y_{n_\nu}-(1+\varepsilon)d_0Ty_{n_\nu}$$

$$\geqq \alpha_{n_\nu}(1+\varepsilon)^{n_\nu}\frac{T^{n_\nu+2}z_0}{\|T^{n_\nu}z_0\|}-\alpha_{n_\nu}(1+\varepsilon)^2\frac{T^2z_0}{\|Tz_0\|}$$

然ルニ

左辺 $\longrightarrow Ty_0-(1+\varepsilon)d_0y_0$, 右辺第一項 $\geqq 0$, 右辺第二項 $\longrightarrow 0$ ナル故 $Ty_0-(1+\varepsilon)d_0y_0\geqq 0$,

$$Ty_0\geqq(1+\varepsilon)d_0y_0.$$

此ノ如クシテ $Ty_0\geqq(1+\varepsilon)d_0y_0$ ナル如キ positive element $y_0>0$ ノ存在ガ示サレタ。コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スルカラ (ii) ノ場合ハ起リ得ナイ。

コレニテ定理1ノ証明ハ完結スル。

定理2. Eヲ semi-order ノアル Banach 空間, TヲEヲEノ中ヘウツス strongly positive, completely continuous ナ linear operator トスル. 若シ條件 (I) ガ満足サレテ居レバ $Ty_0=d_0y_0$ トナル如キ strongly positive element $y_0\gg 0$ 及ビ positive number $d_0>0$ ガ存在スル。

証明: $x>0$ ナル任意ノ $x\in S$ ヲトレバ(9) $Tx\gg 0$

脚註 次頁ヘ

デアルカラ十分小サイ positive number $c>0$ ニ對シテ $Tx \geqq cx$ ガ成立スル。ヨッテ今 $Tx \geqq cx$ ガ少クトモ一ツノ $x>0$ ニ對シテ成立スル如キ c 全体ヲ考ヘ、ソノ上限ヲ d_0 トスレバ定理1ノ証明ト全ク同様ニ $Tz_0 \geqq d_0 z_0$ トナル如キ positive element $z_0>0$ ガ存在スルコトガワカル。(10)

コノ z_0 ニ對シテ $Tz_0 = d_0 z_0$ ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。若シサウデナケレバ $Tz_0 > d_0 z_0$ デアルカラ、T ガ strongly positive デアルコトヨリ $T(Tz_0) \gg d_0 Tz_0$. ヨッテ十分小サイ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $T(Tz_0) \geqq (d_0+\varepsilon) Tz_0$. コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スル。ヨッテ $Tz_0 = d_0 z_0$ デナケレバナラナイ．（定理2ノ証明終）．

定理2ニ於テハ T ガ strongly positive デアル代リニ T^k $(k>1)$ ガ strongly positive デアッテモ同様デアルコトハ容易ニワカルデアロウ。又更ニ條件ヲユルクシテ

---

(9) S ハ少クトモ二点ヲ含ムモノト假定スル。S ガ 0 ノミヨリナルトキハ S ハ内点ヲ含マナイカラ strongly positive operator ハ考ヘラレナイ。

(10) 定理1ノ証明ニ於テハココデハ條件(Ⅲ)ハ使ハナカッタ。定理1ノ証明ニテ條件(Ⅲ)ヲ使ッタノハ(i)ノ場合ニ於テ $Ty_0 \geqq d_0 y_0 > 0$, $\|Ty_0\| = \|d_0 y_0\|$ カラ $Ty_0 = d_0 y_0$ ヲ出ストキダケデアッタ。ソレ以外ノトコロデハ(Ⅱ)ノ代リニ(Ⅰ)ガ成立シテ居レバ十分デアッタノデアル。

「任意ノ $x>0$ ニ對シテ $k=k(x)$ ガ定マリ $T^k x \gg 0$ トナル」ヲ取ルコトモ出來レ。

又一般ニ T ガ positive linear operator デアルトキ T^k ガ λ^k（λ ハ real positive）ヲ固有値ニモチ、且ツソノ固有要素 x ガ $x>0$ ナルモノニ取ルコトガ出來レバ T ガ λ ヲ固有値ニモツコトヲ注意シテオコウ。コレハ若シ $T^k x=\lambda^k x,\ \lambda>0,\ x>0$ ナラバ Schmidt ノ方法ニヨッテ $y=x+\dfrac{Tx}{\lambda}+\dfrac{T^2x}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\dfrac{T^{k-1}x}{\lambda^{k-1}}$ ヲ作ッタトキ、$Ty=\lambda y$ ニテ且ツ $x,\ \dfrac{Tx}{\lambda},\ \dfrac{T^2x}{\lambda^2},\cdots\cdots,\dfrac{T^{k-1}x}{\lambda^{k-1}}$ ガスベテ $\geqq 0$ ナルコトヨリ $y \geqq x>0,\ y \neq 0$ トナルカラデアル。

定理2ハ E. Hopf ノ定理[11]ノ一ツノ抽象化デアル。Hopf ハ $0\leqq x\leqq 1$ ニテ定義サレタ連續函數ノ空間 (C) ニ於テ、positive, 且ツ連續ナ Kernel $K(x,y)$ ニヨル integral operator

$$f(x)\to Tf=g:\ g(y)=\int_0^1 f(x)\,K(x,y)\,dx$$

ヲ考ヘタノデアル。コノ linear operator T ガ completely continuous デ且ツ strongly positive デアルコトハ容易ニワカルカラ定理2ニヨッテ

---

(11) E. Hopf: Über lineare Integralgleichungen mit positivem kern, Sitzungsberichte d. Preussischen Akad. Berlin, 1928, 233頁

$$d_0 f(y) = \int_0^1 f(x) K(x, y)\, dx$$

トナル如キ positive number $d_0 > 0$ ト strongly postive function (即チ $0 \leqq x \leqq 1$ ノ各点ニテ positive) $f \gg 0$ トガ存在スルコトデアル。

Hopf ハ更ニ complex value ノ固有値ノコトヲモ論ジテキル。[12] complex number ノ固有値ヲ論ジルタメニハ complex Banach 空間デノ semi-order ヲ考ヘネバナラナイ。コレニツイテハ次ノ談話デ論ジルコトニスル。

---

(12) Hopf ヨリ以前ニハ Jentzsch ガヤハリコノ問題ヲ論ジテキル。

Jentzsch: Über Integral gleichungen mit positivem Kern, Crellés Journal, 141(19), 235−244.

更ニ positive element ノ Matrix ニツイテハ Frobenius, Perron 等ノ研究ガアルコトヲ附記シテオク。